TOETS DISCRETE STRUCTUREN

18-3-2011

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een willekeurige universele verzameling U. Bewijs dat voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van U geldt: $A \cap (A \cup B) = A$. Benoem de gebruikte regels.

Opgave 2. (10 pt) Gegeven de verzameling $A = \{p, q, r\}$. Welke reguliere expressie correspondeert met de reguliere verzameling $\{pq\,, ppqq\,, ppqpqq\,, ppqpqpqq\,, ppqpqpqpqq\,, \ldots\}$? Geef de reguliere verzamelingen die corresponderen met de volgende reguliere expressies: $(p \vee q)\, r\, q^*$ en $p\,(q\,q)^*\, r$.

Opgave 3. (10 pt) Zij $n \in \mathbb{Z}^+$ en $P(n)$ de bewering: $10\,n < 3^n$. Geef de kleinste integer k waarvoor $P(k)$ waar is, en bewijs vervolgens dat $P(n)$ waar is voor alle $n \geqslant k$.

Opgave 4. (5 pt) De binaire operatie $\diamond$ op $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als: $x \diamond y = \frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Is deze operatie: (i) commutatief? (ii) associatief? Motiveer je antwoord.

Opgave 5. (15 pt) Laat $R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ een relatie zijn op $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

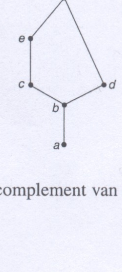
- **a.** Teken de graaf van R
- **b.** Geef de matrixrepresentatie van R
- **c.** Is R reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch?
- **d.** Bepaal R^2 en $R^{-1} \circ R$
- **e.** Bepaal de transitieve afsluiting van R en teken de bijbehorende graaf.

Opgave 6. (10 pt) Gegeven zijn verzamelingen A en B, en een injectieve functie $f : A \to B$, die overal op A is gedefinieerd. Bewijs dat voor elke deelverzameling $V \subseteq A$ geldt: $f^{-1}(f(V)) = V$.

Opgave 7. (5 pt) Bekijk de verzamelingen $\mathbb{Z}^+$ (de natuurlijke getallen) en $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ is een even geheel getal }\}$. De functie $f : \mathbb{Z}^+ \to A$ is gedefinieerd als: $f(n) = 2n$. Bewijs dat f een bijectie (1-1 correspondentie) is tussen $\mathbb{Z}^+$ en A.

Opgave 8. (10 pt) Gegeven zijn de rijen $f(n) = 2^n$ en $g(n) = n!$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Bewijs: f is $O(g)$. Geldt ook dat $f\,\Theta\,g$? Motiveer je antwoord.

Opgave 9. (15 pt)
In de figuur hiernaast is het Hasse diagram van een partiële ordening $\leq$ op $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ weergegeven.



- **a.** Geef alle minimale, maximale, kleinste en grootste elementen van A (voor zover ze bestaan).
- **b.** Geef alle kleinste bovengrenzen en grootste ondergrenzen (voor zover ze bestaan) van de deelverzamelingen $\{b, c, d\}$ en $\{f, b\}$.
- **c.** Is $(A, \leq)$ een tralie? Zo ja, is het tralie begrensd; is het distributief?

Opgave 10. (10 pt) Gegeven een Boolese algebra $(L, \leq)$. Voor elke $a \in L$ wordt met a' het complement van a aangeduid. Bewijs dat voor elke $a, b \in L$, geldt: $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b$.